Calcul différentiel et intégration

M5 – Chapitre 3

I. Théorème de Schwarz

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

Pour une fonction p fois dérivable et dont les dérives partielles à l'ordre p sont continues, l'ordre de dérivation n'importe pas.

II. Formes différentielles

$$\omega = P_1\, dx_1 + \cdots + P_n\, dx_n \quad \text{est une forme différentielle}$$

1. Formes exactes (différentielles totales) et fermées

$$\boxed{\omega \text{ exacte} \Leftrightarrow \exists\, U \mid \omega = dU} \qquad \boxed{\omega \text{ fermé} \Leftrightarrow \forall\,(i,j) \quad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}} \quad \text{(Maxwell)}$$

Théorème de Pointcarré : Dans R^n, $\boxed{\omega \text{ exacte} \Leftrightarrow \omega \text{ fermée}}$

2. Calcul d'intégrales curvilignes

a. Cas général

$$\text{Pour calculer } \int_{A,\gamma}^{B} \omega\,, \quad \text{on paramétrise } \gamma.$$

$$dx_i = \dot{x}_i(t)\, dt \qquad P_i = P_i(x_1, \dots, x_n) = P_i(t) \qquad \omega = \sum_{i=1}^{n} P_i\, dx_i = \left[\sum_{i=1}^{n} P_i\, \dot{x}_i(t)\right] dt$$

$$\boxed{\int_{A,\gamma}^{B} \omega = \int_{t_i}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{n} P_i\, \dot{x}_i(t)\right] dt}$$

b. Cas d'une différentielle exacte

Si ω est une différentielle exacte de primitive U, alors $\int_{A,\gamma}^{B} \omega$ ne dépend pas du chemin suivi. Donc :

$$\int_{A,\gamma}^{B} \omega = U(B) - U(A)$$

c. Calcul du travail d'une force

$$\boxed{W_{A\to B,\gamma}(F) = \int_{A,\gamma}^{B} \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{dl}}_{=\omega} = \int_{t_{A,\gamma}}^{t_B} \vec{F}\cdot\dot{\vec{\gamma}}\, dt} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

3. Théorème de synthèse

$$\underbrace{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U)}_{\vec{F}\cdot\vec{dl} \text{ différentielle exacte}} \Leftrightarrow \vec{F} \text{ conservatif} \Leftrightarrow \underbrace{\text{Maxwell vérifié}}_{\vec{F}\cdot\vec{dl} \text{ différentielle fermée}}$$

III. Extremum local

1. Définition

$$\boxed{A(\alpha,\beta)\text{ point critique de } f \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

2. Théorème de Monge

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\Delta = s^2 - rt}$$

- $\Delta < 0$ $r > 0$ Minimum local
    $r < 0$ Maximum local
- $\Delta > 0$ Point col ou selle
- $\Delta = 0$ On ne peut pas conclure

IV. Equations de dérivées partielles

On cherche à se ramener à $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow f(x,y) = c(y)}$ ou $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(x,y) = c(x)}$ $\quad c \in \mathcal{C}^1$

1. Changement de fonction

On peut faire un « changement de fonction » en exprimant f en fonction de g.

On calcule les dérives partielles de f en fonction de celles de g, on les remplace dans l'équation et on calcule g. On en déduit f.

$$\left(\text{ex} : g = \frac{f + x}{y} \;\Rightarrow\; g = c(y) \;\Rightarrow\; f = y \cdot c(y) - x \quad c \in \mathcal{C}^1\right)$$

2. Changement de variable

On peut faire un changement de variable. $f(x,y) = g(u,v) = g \circ \underbrace{\varphi(x,y)}_{=(u,v)}$

On calcule les dérives partielles de f en fonction de celles de g, on les remplace dans l'équation et on calcule g. On en déduit f.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}}$$

$$\left(Ex : \begin{matrix} u = x \\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(u,v) = c(v) \Rightarrow f(x,y) = c\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \right)$$

V. Intégration double

1. Définition

$$\mathcal{D} = \begin{Bmatrix} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right] dx}$$

2. Théorème de Fibonacci

$$I_{x,y}(f) = I_{y,x}(f)$$

3. Théorème de Green-Riemann

$\mathcal{D}$ domaine entouré par une courbe fermée γ parcourue dans le sens trigonométrique, $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} \; = \; \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy}$$

VI. Rotationnel et divergence (dans $\mathbb{R}^3$)

1. Définition

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ Q \\ R \end{pmatrix} \qquad \boxed{\mathrm{Div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}} \qquad \boxed{\mathrm{Rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}}$$

2. Forme d'Ostrogradski

γ : courbe fermée $\qquad S$: surface s'appuyant sur γ $\qquad \vec{n}$: vecteur normal à S $\qquad \phi$: flux

$$\boxed{\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \phi = \iint_{S} \mathrm{Rot}(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{dS}} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{dS} = dS \times \vec{n}$$